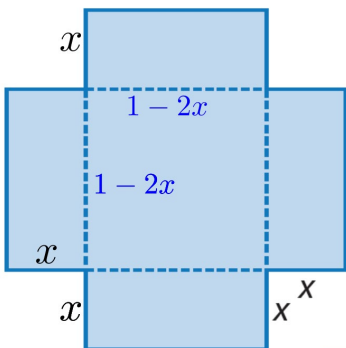


## 13.1

Poisleikattavan neliön sivun pituus on  $x$ .



Laatikon pohja muodostuu keskelle jäävästä neliöstä, jonka sivun pituus on  $1,0 - 2x$  metriä. Laatikon korkeus on  $x$  metriä.

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee laatikon tilavuuden.

$$\begin{aligned} V(x) &= x \cdot (1 - 2x)(1 - 2x) \\ &= 4x^3 - 4x^2 + x \end{aligned}$$

[Sievennetään CAS-laskimella.](#)

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$x \geq 0$$

$$1 - 2x \geq 0$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa välillä  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 4x^3 - 4x^2 + x$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = \frac{1}{6} \approx 0,17$  (m).

Laatikon tilavuus on suurin, kun poisleikattavan neliön sivun pituus  $x \approx 0,17$  m.

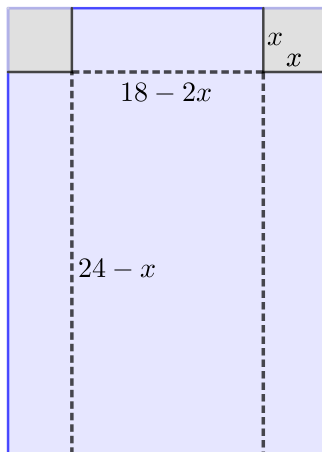
### **Vastaus**

$x \approx 0,17$  m

## 13.2

Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$ .

Laatikon pohja muodostuu keskelle jäävästä suorakulmiosta, jonka sivujen pituudet ovat  $24 - x$  ja  $18 - 2x$ .  
Laatikon korkeus on  $x$  metriä.



Muodostetaan funktio, joka ilmaisee laatikon tilavuuden.

$$\begin{aligned} V(x) &= x \cdot (24 - x)(18 - 2x) \\ &= 2x^3 - 66x^2 + 432x \end{aligned}$$

Sievennetään CAS-laskimella.

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$\begin{array}{c|c|c} x \geq 0 & \begin{array}{c} 24 - x \geq 0 \\ x \leq 24 \end{array} & \begin{array}{c} 18 - 2x \geq 0 \\ x \leq 9 \end{array} \end{array}$$

Yhdistetään määrittelyehdot. On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa välillä  $0 \leq x \leq 9$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 2x^3 - 66x^2 + 432x$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 9$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 4$ .

Rasian tilavuus on suurin, kun poisleikattavan neliön sivun pituus  $x = 4$  (cm).

Laatikon suurin tilavuus on  $V(4) = 800$  (cm<sup>3</sup>).

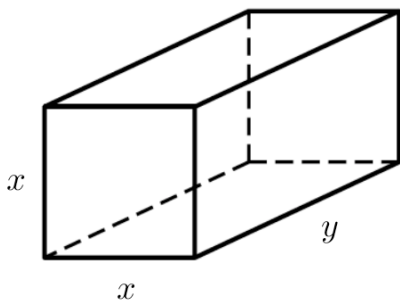
Tilavuus on suurin, kun poisleikattavan neliön sivun pituus on 4 cm.  
Tällöin rasian tilavuus on 800 cm<sup>3</sup>.

**Vastaus**

neliön sivun pituus 4 cm, rasian tilavuus 800 cm<sup>3</sup>

## 13.3

Merkitään päätyneliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$  ja varjostimen korkeutta kirjaimella  $y$ .



Rautalankaa on käytettävissä 300 cm, joten särmien pituuksien summan pitää olla 300. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$8x + 4y = 300$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 75 - 2x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee varjostimen pinta-alan.

$$A(x) = 2x^2 + 4xy$$

Sijoitetaan  $y = 75 - 2x$ .

$$= 2x^2 + 4x(75 - 2x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= -6x^2 + 300x$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $A$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$75 - 2x \geq 0$$

$$x \leq 37,5$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $A$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 37,5$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $A(x) = -6x^2 + 300x$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 37,5$  kohta, jossa funktion  $A$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 25$ .

Suurin pinta-ala saadaan, kun  $x = 25$ . Lasketaan varjostimen mitat.

pohjaneliön sivun pituus:  $x = 25$  (cm)

korkeus:  $y = 75 - 2x = 75 - 2 \cdot 25 = 25$  (cm)

Varjostin on siis kuutio, jonka särmän pituus on 25 cm.

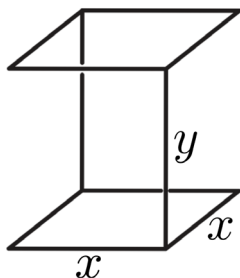
### **Vastaus**

pohjasärmät 25 cm, korkeus 25 cm

(Varjostin on kuutio, jonka särmän pituus on 25 cm.)

## 13.4

Merkitään pohjaneliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$  ja kehikon korkeutta kirjaimella  $y$ .



Rautalankaa on käytettävissä 36 cm, joten särmien pituuksien summan pitää olla 36. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$8x + 2y = 36$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 18 - 4x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee särmiön tilavuuden.

$$V(x) = x \cdot x \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 18 - 4x$ .

$$= x \cdot x \cdot (18 - 4x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 18x^2 - 4x^3$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$18 - 4x \geq 0$$

$$x \leq 4,5$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 4,5$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 18x^2 - 4x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 4,5$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 3$ .

Suurin tilavuus saadaan, kun  $x = 3$ . Lasketaan särmiön mitat.

pohjaneliön sivun pituus:  $x = 3$  (cm)

särmiön korkeus:  $y = 18 - 4x = 18 - 4 \cdot 3 = 6$  (cm)

Pohjasärmän pituus on 3 cm ja särmiön korkeus on 6 cm.

### **Vastaus**

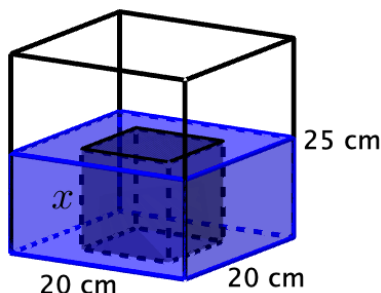
pohjasärmät 3 cm, korkeus 6 cm



## 13.5

Kun kuutio juuri ja juuri peittyy, öljykerros on kuution särmän korkuinen. Öljyn tilavuus saadaan, kun kuution (koneen osa) särmän korkuisen suorakulmaisen särmiön tilavuudesta vähennetään kuution tilavuus.

Merkitään kuution särmän pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$ .



Kuution särmän korkuisen suorakulmaisen särmiön tilavuus on

$$20 \cdot 20 \cdot x = 400x.$$

Kuution muotoisen koneen osan tilavuus on

$$x^3.$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee osan peittämiseen tarvittavan vesimäärän.

$$V(x) = 400x - x^3$$

Päätellään funktion  $V$  määrittelyehto. Koska astian korkeus on suurempi kuin pohjan sivun pituus, kuution muotoinen koneen osa voi olla astian pohjan levyinen. Koneen osan särmän pituus on vähintään nolla ja enintään yhtä suuri kuin astian pohjan sivun pituus:  $0 \leq x \leq 20$ .

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 20$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 400x - x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 20$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ .

Funktio  $V$  saa suurimman arvonsa kohdassa  $x = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,5$ .

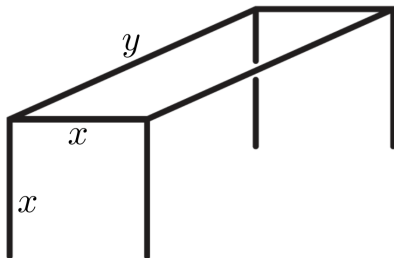
Koneen osan peittäminen vaatii eniten öljyä, kun kuution särmän pituus on 11,5 cm.

**Vastaus**

Kuution, jonka särmän pituus on 11,5 cm.

## 13.6

Merkitään päätyneliön sivun pituutta metreinä kirjaimella  $x$  ja vajan pituutta kirjaimella  $y$ .



Teräsputkea on käytettävissä 36 m, joten särmien pituuksien summan pitää olla 36. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$6x + 2y = 36$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 18 - 3x$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$18 - 3x \geq 0$$

$$x \leq 6$$

Muuttujan  $x$  on siis oltava välillä  $0 \leq x \leq 6$ .

**a)** Muodostetaan funktio, joka ilmaisee vajan tilavuuden.

$$V(x) = x \cdot x \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 18 - 3x$ .

$$= x \cdot x \cdot (18 - 3x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 18x^2 - 3x^3$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 6$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 18x^2 - 3x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 6$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 4$ .

Suurin tilavuus saadaan, kun  $x = 4$ . Lasketaan vajan mitat.

Päätyneliön sivun pituus:  $x = 4$  (m)

Vajan pituus:  $y = 18 - 3x = 18 - 3 \cdot 4 = 6$  (m)

Päätyneliön sivun pituus on 4 m ja vajan pituus 6 m.

**b)** Muodostetaan funktio, joka ilmaisee vajan lattipinta-alan.

$$A(x) = x \cdot y$$

$$= x \cdot (18 - 3x)$$

$$= 18x - 3x^2$$

Sijoitetaan  $y = 18 - 3x$ .

Sievennetään CAS-laskimella.

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $A$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 6$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $A(x) = 18x - 3x^2$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 6$  kohta, jossa funktion  $A$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 3$ .

Suurin lattiapinta-ala saadaan, kun  $x = 3$ . Lasketaan vajan mitat.

Päätyneliön sivun pituus:  $x = 3$  (m)

Vajan pituus:  $y = 18 - 3x = 18 - 3 \cdot 3 = 9$  (m)

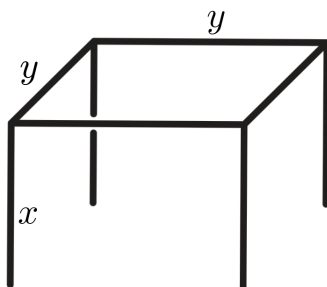
Päätyneliön sivun pituus on 3 m ja vajan pituus 9 m.

**Vastaus**

- a)** päätyneliön sivu 4 m, vajan pituus 6 m  
**b)** päätyneliön sivu 3 m, vajan pituus 9 m

## 13.7

Merkitään pystyparrun pituutta metreinä kirjaimella  $x$  ja kattokehikon sivun pituutta kirjaimella  $y$ .



Parrua tarvitaan  $4x$  metriä ja lankkua  $4y$  metriä. Puutavara saa maksaa yhteensä 180 euroa. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$4x \cdot 7,50 + 4y \cdot 5,00 = 180$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$   
CAS-laskimella.

$$y = 9 - 1,5x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee katoksen tilavuuden.

$$V(x) = x \cdot y \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 9 - 1,5x$ .

$$= x \cdot (9 - 1,5x) \cdot (9 - 1,5x) \text{ Sievennetään CAS-laskimella.}$$

$$= 2,25x^3 - 27x^2 + 81x$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$9 - 1,5x \geq 0$$

$$x \leq 6$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa

suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 6$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 2,25x^3 - 27x^2 + 81x$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 6$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 2$ .

Suurin tilavuus saadaan, kun  $x = 2$ . Lasketaan katoksen mitat.

Pystyparrun pituus:  $x = 2$  (m)

Kattokehikon sivun pituus:  $y = 9 - 1,5x = 9 - 1,5 \cdot 2 = 6$  (m)

Pystyparrun pituus on 2 m ja kattokehikon sivun pituus 6 m.

### **Vastaus**

kattoneliön sivun pituus 6 m, katoksen korkeus 2 m

## 13.8

Merkitään paketin pohjan sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$  ja paketin korkeutta kirjaimella  $y$ .

Pohjan ympärysmittan ja paketin korkeuden summa saa olla enintään 300 cm. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$4x + y = 300$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 300 - 4x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee paketin tilavuuden.

$$V(x) = x \cdot x \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 300 - 4x$ .

$$= x \cdot x \cdot (300 - 4x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 300x^2 - 4x^3$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$300 - 4x \geq 0$$

$$x \leq 75$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 75$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 300x^2 - 4x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 75$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 50$ .

Suurin tilavuus saadaan, kun  $x = 50$ . Lasketaan paketin mitat.

Pohjaneliön sivun pituus:  $x = 50$  (cm)



Paketin korkeus:  $y = 300 - 4x = 300 - 4 \cdot 50 = 100$  (cm)

Paketin suurin mahdollinen tilavuus on

$$\begin{aligned} V(50) &= 250\,000 \text{ cm}^3 & 1000 \text{ cm}^3 &= 1 \text{ dm}^3 \\ &= 250 \text{ dm}^3 & 1 \text{ dm}^3 &= 1 \text{ L} \\ &= 250 \text{ L} \end{aligned}$$

Suurimman paketin pohjaneliön sivun pituus on 50 cm ja paketin korkeus 100 cm. Tällöin paketin tilavuus on 250 L.

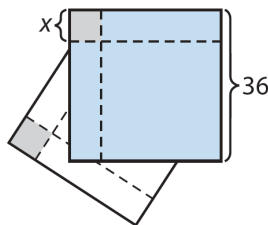
### **Vastaus**

pohjaneliön sivu 50 cm, paketin korkeus 100 cm, tilavuus 250 L

## 13.9

Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$ .

Laatikon pohja muodostuu neliöstä, jonka sivun pituus on  $36 - x$ . Laatikon korkeus on  $x$ .



Muodostetaan funktio, joka ilmaisee laatikon tilavuuden.

$$\begin{aligned} V(x) &= x \cdot (36 - x)(36 - x) \\ &= x^3 - 72x^2 + 1296x \end{aligned}$$

Sievennetään CAS-laskimella.

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$\begin{array}{l|l} x \geq 0 & \begin{array}{l} 36 - x \geq 0 \\ x \leq 36 \end{array} \end{array}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa välillä  $0 \leq x \leq 36$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = x^3 - 72x^2 + 1296x$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 36$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 12$ .

Rasian tilavuus on suurin, kun poisleikattavan neliön sivun pituus  $x = 12$  (cm).

Laatikon suurin tilavuus on  $V(12) = 6912$  (cm<sup>3</sup>).

Muutetaan tilavuus litroiksi.

$$\begin{aligned} 6912 \text{ cm}^3 & \qquad 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3 \\ = 6,912 \text{ dm}^3 & \qquad 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} \\ = 6,912 \text{ L} \approx 6,9 \text{ L} \end{aligned}$$

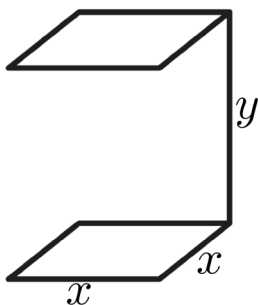
Tilavuus on suurin, kun poisleikattavan neliön sivun pituus on 12 cm.  
Tällöin rasian tilavuus on 6,9 litraa.

### **Vastaus**

neliön sivun pituus 12 cm, rasian tilavuus 6,9 L

## 13.10

Merkitään päätyneliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$  ja kehikon korkeutta kirjaimella  $y$ .



Rautalankaa on käytettävissä 24 cm, joten särmien pituuksien summan pitää olla 24. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$8x + y = 24$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 24 - 8x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee särmiön tilavuuden.

$$V(x) = x \cdot x \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 24 - 8x$ .

$$= x \cdot x \cdot (24 - 8x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 24x^2 - 8x^3$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$24 - 8x \geq 0$$

$$x \leq 3$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 4,5$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 24x^2 - 8x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 3$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 2$ .

Suurin tilavuus saadaan, kun  $x = 2$ . Lasketaan särmiön mitat.

pohjaneliön sivun pituus:  $x = 2$  (cm)

kehikon korkeus:  $y = 24 - 8x = 24 - 8 \cdot 2 = 8$  (cm)

Pohjasärmän pituus on 2 cm ja särmiön korkeus on 8 cm.

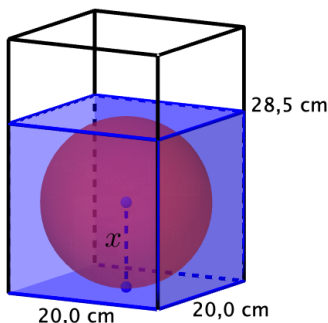
### **Vastaus**

pohjasärmät 2 cm, korkeus 8 cm

## 13.11

Kun pallo juuri ja juuri peittyy, nestekerros on pallon halkaisijan korkuinen. Nesteen tilavuus saadaan, kun pallon halkaisijan korkuisen suorakulmaisen särmiön tilavuudesta vähennetään pallon tilavuus.

Merkitään pallon sädettä senttimetreinä kirjaimella  $x$ , jolloin pallon halkaisija on  $2x$ .



Pallon halkaisijan korkuisen suorakulmaisen särmiön tilavuus on

$$20 \cdot 20 \cdot 2x = 800x.$$

Pallon tilavuus on

$$\frac{4}{3}\pi x^3.$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee pallon peittämiseen tarvittavan nestemäärän.

$$V(x) = 800x - \frac{4}{3}\pi x^3$$

Päätellään funktion  $V$  määrittelyehto. Koska astian korkeus on suurempi kuin pohjan sivun pituus, pallo voi olla astian levyinen. Pallon säde on siis vähintään nolla ja enintään puolet pohjaneliön sivun pituudesta:  $0 \leq x \leq 10$ .

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 10$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 800x - \frac{4}{3}\pi x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 10$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ .

Funktio  $V$  saa suurimman arvonsa kohdassa  $x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \approx 8,0$ .

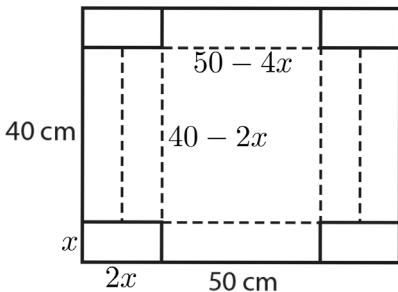
Pallon peittäminen vaatii eniten nestettä, kun pallon säde on 8,0 cm.

### **Vastaus**

Pallon, jonka säde on 8,0 cm.

## 13.12

Merkitään poisleikattavan suorakulmion lyhyemmän sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$ , jolloin pidemmän sivun pituus on  $2x$ .



Laatikon pohja muodostuu keskelle jäävästä suorakulmiosta, jonka sivujen pituudet ovat  $40 - 2x$  ja  $50 - 4x$ . Laatikon korkeus on  $x$ .

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee laatikon tilavuuden.

$$\begin{aligned} V(x) &= x \cdot (40 - 2x)(50 - 4x) \\ &= 8x^3 - 260x^2 + 2000x \end{aligned}$$

Sievennetään CAS-laskimella.

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$\begin{array}{c|c|c} x \geq 0 & \begin{array}{c} 40 - 2x \geq 0 \\ x \leq 20 \end{array} & \begin{array}{c} 50 - 4x \geq 0 \\ x \leq 12,5 \end{array} \end{array}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa välillä  $0 \leq x \leq 12,5$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 8x^3 - 260x^2 + 2000x$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 12,5$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 5$ .



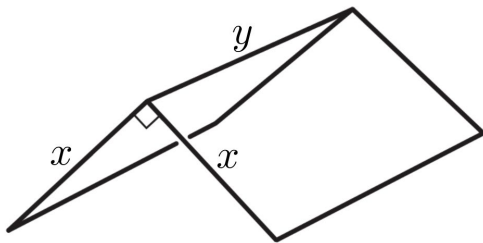
Laatikon tilavuus on suurin, kun poisleikattavan palan lyhyemmän sivun pituus on 5 cm.

**Vastaus**

5 cm

## 13.13

Merkitään päätykolmion kateetin pituutta metreinä kirjaimella  $x$  ja kasvihuoneen pituutta kirjaimella  $y$ .



Putkea on käytettävissä 36 m. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$4x + 3y = 36$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 12 - \frac{4}{3}x$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia.

$$\begin{array}{l|l} x \geq 0 & y \geq 0 \\ & 12 - \frac{4}{3}x \geq 0 \\ & x \leq 9 \end{array}$$

Muuttujan  $x$  on siis oltava välillä  $0 \leq x \leq 9$ .

**a)** Muodostetaan funktio, joka ilmaisee kasvihuoneen tilavuuden.

$$V(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 12 - \frac{4}{3}x$ .

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \left(12 - \frac{4}{3}x\right)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 6x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 9$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 6$ .

Kasvihuoneen tilavuus on suurin, kun  $x = 6$ . Lasketaan kasvihuoneen mitat.

Päätykolmion kyljen pituus:  $x = 6$  (m)

Kasvihuoneen pituus:  $y = 12 - \frac{4}{3}x = 12 - \frac{4}{3} \cdot 6 = 4$  (m).

Kasvihuoneen tilavuus on suurin, kun päätykolmion kyljen pituus on 6 m ja kasvihuoneen pituus 4 m

**b)** Muodostetaan funktio, joka ilmaisee kasvihuoneen kattopinta-alan.

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 \cdot x \cdot y && \text{Sijoitetaan } y = 12 - \frac{4}{3}x. \\ &= 2 \cdot x \cdot \left(12 - \frac{4}{3}x\right) && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= 24x - \frac{8}{3}x^2 \end{aligned}$$

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $A(x) = 24x - \frac{8}{3}x^2$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 9$  kohta, jossa funktion  $A$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = \frac{9}{2}$ .

Kasvihuoneen kattopinta-ala on suurin, kun  $x = \frac{9}{2}$ . Lasketaan kasvihuoneen mitat.

Päätykolmion kyljen pituus:  $x = \frac{9}{2} = 4,5$  (m)

Kasvihuoneen pituus:  $y = 12 - \frac{4}{3}x = 12 - \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2} = 6$  (m).

Kasvihuoneen kattopinta-ala on suurin, kun päätykolmion kyljen pituus on 4,5 m ja kasvihuoneen pituus 6 m

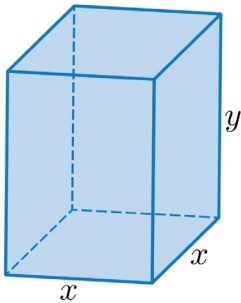
### **Vastaus**

**a)** päätykolmion kylki 6 m, kasvihuoneen pituus 4 m

**b)** päätykolmion kylki 4,5 m, kasvihuoneen pituus 6 m

## 13.14

Merkitään pohjaneliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$  ja särmiön korkeutta kirjaimella  $y$ .



Rautalankaa on käytettävissä 280 cm, joten särmien pituuksien summan pitää olla 280. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$8x + 4y = 280$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 70 - 2x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee särmiön kokonaispinta-alan.

$$A(x) = x \cdot x + 4 \cdot x \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 70 - 2x$ .

$$= x \cdot x + 4 \cdot x \cdot (70 - 2x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 280x - 7x^2$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion  $A$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$70 - 2x \geq 0$$

$$x \leq 35$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 35$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $A(x) = 280x - 7x^2$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 35$  kohta, jossa funktion  $A$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 20$ .

Suurin kokonaispinta-ala saadaan, kun  $x = 20$  (cm). Lasketaan särmiön mitat.

pohjaneliön sivun pituus:  $x = 20$  (cm)

särmiön korkeus:  $y = 70 - 2x = 70 - 2 \cdot 20 = 30$  (cm)

Pohjasärmän pituus on 20 cm ja särmiön korkeus on 30 cm.

### **Vastaus**

pohjasärmät 20 cm, korkeus 30 cm

## 13.15

Merkitään laukun leveyttä senttimetreinä kirjaimella  $x$ , jolloin laukun leveys on  $2x$ . Merkitään laukun korkeutta senttimetreinä kirjaimella  $y$ .

Pituuden, leveyden ja korkeuden summa saa olla enintään 115 cm. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$x + 2x + y = 115$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 115 - 3x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee laukun tilavuuden.

$$V(x) = x \cdot 2x \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 115 - 3x$ .

$$= x \cdot 2x \cdot (115 - 3x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 230x^2 - 6x^3$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$115 - 3x \geq 0$$

$$x \leq \frac{115}{3}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq \frac{115}{3}$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 230x^2 - 6x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq \frac{115}{3}$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = \frac{230}{9}$ .

Suurin tilavuus saadaan, kun  $x = \frac{230}{9}$ . Lasketaan laukun mitat.

$$\text{leveys: } x = \frac{230}{9} \approx 25,6 \text{ (cm)}$$

$$\text{pituus: } 2x = 2 \cdot \frac{230}{9} = \frac{460}{9} \approx 51,1 \text{ (cm)}$$

$$\text{korkeus: } y = 115 - 3x = 115 - 3 \cdot \frac{230}{9} = \frac{115}{3} \approx 38,3 \text{ (cm)}$$

Suurimman laukun mitat ovat 25,6 cm, 51,1 cm ja 38,3 cm.

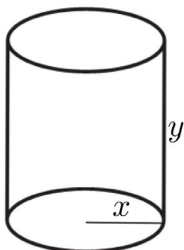
**Vastaus**

25,6 cm, 51,1 cm ja 38,3 cm



## 13.16

Merkitään pohjaympyrän sädettä senttimetreinä kirjaimella  $x$  ja kehikon korkeutta kirjaimella  $y$ .



Rautalankaa on käytettävissä 100 cm. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot \pi \cdot x}_{\text{ympyrän piiri}} + 2y = 100$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$   
CAS-laskimella.

$$y = 50 - 2 \cdot \pi \cdot x$$

**a)** Muodostetaan funktio, joka ilmaisee lieriön tilavuuden.

$$V(x) = \underbrace{\pi \cdot x^2}_{\text{pohja pinta-ala}} \cdot \underbrace{y}_{\text{korkeus}}$$

Sijoitetaan  $y = 50 - 2 \cdot \pi \cdot x$ .

$$= \pi \cdot x^2 \cdot (50 - 2 \cdot \pi \cdot x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 50 \cdot \pi \cdot x^2 - 2 \cdot \pi^2 \cdot x^3$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$150 - 2 \cdot \pi \cdot x \geq 0$$

$$x \leq \frac{25}{\pi}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq \frac{25}{\pi}$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = 50 \cdot \pi \cdot x^2 - 2 \cdot \pi^2 \cdot x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq \frac{25}{\pi}$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = \frac{50}{3 \cdot \pi}$ .

Suurin tilavuus saadaan, kun  $x = \frac{50}{3 \cdot \pi}$ . Lasketaan lieriön mitat.

pohjaympyrän halkaisija:  $2x = 2 \cdot \frac{50}{3 \cdot \pi} \approx 10,6 \text{ (cm)}$  (cm)

lieriön korkeus:  $y = 50 - 2 \cdot \pi \cdot x = 50 - 2 \cdot \pi \cdot \frac{50}{3 \cdot \pi} \approx 16,7 \text{ (cm)}$

Pohjan halkaisija on 10,6 cm ja rasian korkeus 16,7 cm.

**b)** Lasketaan funktion  $V$  suurin arvo.

$$V\left(\frac{50}{3\pi}\right) \approx 1473,66 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Muutetaan vastaus litroiksi.

$$1473,66 \text{ cm}^3$$

$$= 1,47366 \text{ dm}^3$$

$$= 1,47366 \text{ L}$$

$$\approx 1,5 \text{ L}$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$$

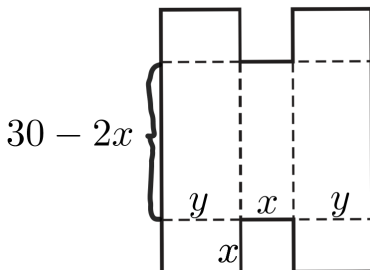
**Vastaus**

- a)** pohjan halkaisija 10,6 cm, rasian korkeus 16,7 cm  
**b)** 1,5 L

## 13.17

Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$  ja muodostuvan laatikon korkeutta kirjaimella  $y$ .

Laatikon pohja muodostuu keskelle jäävästä suorakulmiosta, jonka sivujen pituudet ovat  $x$  ja  $30 - 2x$ .



Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$y + x + y = 24$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 12 - \frac{x}{2}$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee laatikon tilavuuden.

$$V(x) = x \cdot (30 - 2x) \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 12 - \frac{x}{2}$ .

$$= x \cdot (30 - 2x) \cdot \left(12 - \frac{x}{2}\right)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= x^3 - 39x^2 + 360x$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Pätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$\begin{array}{c|c|c} x \geq 0 & \begin{array}{c} 30 - 2x \geq 0 \\ x \leq 15 \end{array} & \begin{array}{c} 12 - \frac{x}{2} \geq 0 \\ x \leq 24 \end{array} \end{array}$$

Yhdistetään määrittelyehdot. On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa välillä  $0 \leq x \leq 15$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = x^3 - 39x^2 + 360x$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 15$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 6$ .

Laatikon tilavuus on suurin, kun poisleikattavan neliön sivun pituus  $x = 6$  cm.

**Vastaus**

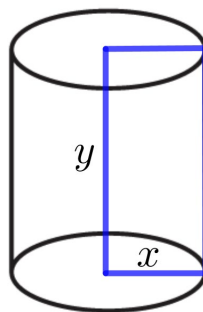
6 cm

## 13.18

Merkitään suorakulmion sivujen pituuksia kirjaimilla  $x$  ja  $y$ .

Jos suorakulmio pyörrähtää  $y$ :n pituisen sivun ympäri, niin muodostuvan lieriön korkeus on  $y$  ja pohjan säde  $x$ .

Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.



$$2x + 2y = 2a$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = a - x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee lieriön tilavuuden.

$$V(x) = \pi \cdot x^2 \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = a - x$ .

$$= \pi \cdot x^2 \cdot (a - x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= a \cdot \pi \cdot x^2 - \pi \cdot x^3$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} y \geq 0 \\ a - x \geq 0 \\ x \leq a \end{array}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa välillä  $0 \leq x \leq a$ .

Polynomifunktio  $V(x) = a \cdot \pi \cdot x^2 - \pi \cdot x^3$  saa suljetulla välillä  $0 \leq x \leq a$  suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$V(x) = a \cdot \pi \cdot x^2 - \pi \cdot x^3 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$V'(x) = 2a \cdot \pi \cdot x - 3 \cdot \pi \cdot x^2$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2a \cdot \pi \cdot x - 3 \cdot \pi \cdot x^2 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{3}a$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille  $0 \leq x \leq a$ .

Lasketaan funktion  $V$  arvo välin  $0 \leq x \leq a$  päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$V(x) = a \cdot \pi \cdot x^2 - \pi \cdot x^3$$

$$V(0) = 0$$

$$V(a) = 0$$

$$V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{4\pi}{27} \cdot a^3 \quad \text{suurin}$$

Tilavuus on suurin, kun  $x = \frac{2}{3}a$ . Tällöin sivu, jonka ympäri suorakulmio

pyörii, on pituudeltaan  $y = a - x = a - \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}a$ .

**Vastaus**

$$\frac{1}{3}a$$